Задача 1. Пусть $\rho(x, y)$ метрика на множестве X. Доказать, что функция является метрикой на X.

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

Задача 2. Пусть $\rho(x, y)$ метрика на множестве X. Доказать, что функция является метрикой на X.

$$\rho_1(x, y) = \min 1, \rho(x, y)$$

Задача 3. Пусть $\rho(x, y)$ метрика на множестве X. Доказать, что функция является метрикой на X.

$$\rho_1(x, y) = ln(1 + \rho(x, y))$$

Задача 4. Докажите, что множество ℓ^p, $p \geq 1$, числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,$$

с заданным на нем отображением

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

является полным метрическим пространством.

Задача 5. Докажите, что множество ℓ^∞ всех ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ с заданным на нем отображением

$$\rho(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

является полным метрическим пространством.

Задача 6. Докажите, что множество c_0 всех сходящихся к нулю числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ с заданным на нем отображением

$$\rho(x, y) = \max_k |x_k - y_k|$$

является полным метрическим пространством.

Задача 7. Докажите, что множество s всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ с заданным на нем отображением

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

является полным метрическим пространством.

Задача 8. Докажите, что множество $C_{[a,b]}$ с заданным на нем отображением

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

является полным метрическим пространством.

Задача 9. Докажите, что множество $C^m_{[a,b]}$ с заданным на нем отображением

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [a,b]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|$$

является полным метрическим пространством.

Задача 10. Будет ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если

$$\rho(x, y) = sin^2(x - y).$$

Задача 11. Будет ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если

$$\rho(x, y) = |arctg(x) - arctg(y)|.$$

Задача 12. Будет ли метрическим пространством множество прямых ℓ : $x \cdot cos(\alpha) + y \cdot sin(\alpha) - p$ на плоскости xOy, если

$$\rho(x, y) = |p_2 - p_1| + |sin(\alpha_2) - sin(\alpha_1)|.$$

Задача 13. Положим в множестве натуральных чисел

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 0, \text{ при } m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n}, \text{ при } m \neq n \end{cases}$$

Докажите, что $\rho(m, n)$ метрика.

Задача 14. Пусть $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, m}$. Докажите, что в пространстве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in R)$ можно ввести норму следующим способом

$$\|x\| = \max_{1 \le k \le m} \alpha_k |x_k|$$

Задача 15. Пусть $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, m}$. Докажите, что в пространстве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in R)$ можно ввести норму следующим способом

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|$$

Задача 16. Пусть $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, m}$. Докажите, что в пространстве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in R)$ можно ввести норму следующим способом

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Задача 17. Пусть $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, m}$. Докажите, что в пространстве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in R)$ можно ввести норму следующим способом

$$\|x\| = \max_{1 \le k \le m} \left| \sum_{k=1}^{m} x_k \right|$$

Задача 18. Покажите, что $L^2_{[a,b]}$ является полным нормированным пространством, если

$$\|x\| = \left[\int_a^b |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Задача 19. Покажите, что $C^1_{[a,b]}$ является полным нормированным пространством, если

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|$$

Задача 20. Покажите, что пространство $C_{[a,b]}$ не полно по норме

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$$

Задача 21. Проверьте, является ли в пространстве s всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{k+n}{n}$ и $\|x_n\| = |x_{n1} + x_{n2}|$

Задача 22. Проверьте, является ли в пространстве ℓ^p $(p \geq 1)$ числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{1}{nk}$

Задача 23. Проверьте, является ли в пространстве ℓ^p $(p \geq 1)$ числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{1}{k\sqrt{(nk)}}$

Задача 24. Проверьте, является ли в пространстве m ограниченных числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{k+n}{1+k+n}$

Задача 25. Проверьте, является ли в пространстве m ограниченных числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{n}{k+2n}$

Задача 26. Проверьте, является ли в пространстве m ограниченных числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$

Задача 27. Проверьте, является ли в пространстве ℓ^p $(p \geq 1)$ числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{n}{k+2n}$

Задача 28. Проверьте, является ли в пространстве m ограниченных числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{n}{n^2+k}$

Задача 29. Проверьте, является ли в пространстве ℓ^1 числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = \frac{n}{nk^2+1}$

Задача 30. Проверьте, является ли в пространстве m ограниченных числовых последовательносей $x = (x_1, x_2, ...)$ сходящейся последовтельность $x_n = (x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, если $x_{nk} = n \cdot sin\left(\frac{1}{nk}\right)$

Задача 31. Найдите норму функционала в пространстве $C_{[0,1]}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)dt$$

Задача 32. Найдите норму функционала в пространстве ℓ_1

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx_k}{k^2 + 10}$$

Задача 33. Найдите норму оператора $A : L_2[0,1] \to L^2[0,1]$

$$Af(x) = x^2 \int_0^1 f(t)dt$$

Задача 34. Найдите норму оператора $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$

$$Ax(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k x(t_k),\ t_k \in [0,1]$$

Задача 35. Найдите норму функционала в пространстве $L_2[0,1]$

$$f(x) = \int_0^1 x(t)sin(t)dt$$

Задача 36. Найдите норму функционала в пространстве ℓ_1

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) x_k$$

Задача 37. Является ли непрерывным в $C_{[0,1]}$ функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t)sgn(t - 1/2)dt$$

Задача 38. Является ли непрерывным в $L_2[0,1]$ функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t)sgn(t - 1/2)dt$$

Задача 39. Является ли непрерывным в $C_{[0,1]}$ функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t^2) t^{-1/3} dt$$

Задача 40. Является ли непрерывным в $L_2[0,1]$ функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t^2) t^{-1/3} dt$$

Задача 41. Является ли непрерывным в $C_{[0,1]}$ функционал

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$$

Задача 42. Является ли непрерывным в $L_2[0,1]$ функционал

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$$

Задача 43. Докажите, что оператор $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$ является линейным и ограниченным и найдите его норму, если

$$Ax(t) = t^2 x(0)$$

Задача 44. Докажите, что оператор $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$ является линейным и ограниченным и найдите его норму, если

$$Ax(t) = x(t^2)$$

Задача 45. Докажите, что оператор $A : C^1_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ является линейным и ограниченным и найдите его норму, если

$$Ax(t) = \frac{dx}{dt}$$

Задача 46. Докажите, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ является линейным и ограниченным, если

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Задача 47. Докажите, что оператор $A : H^1[0,1] \to L_2[0,1]$ является линейным и ограниченным, если

$$Ax(t) = tx(t)$$

Задача 48. Докажите, что оператор $A : H^1[0,1] \to H^1[0,1]$ является линейным и ограниченным, если

$$Ax(t) = tx(t)$$

Задача 49. Докажите, что оператор $A : H^1[0,1] \to L_2[0,1]$ является линейным и ограниченным и найдите его норму, если

$$Ax(t) = x(t)$$

Задача 50. Докажите, что функционал является линейным и непрерывным, найдите его норму.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k,\ x = (x_1, x_2, ...) \in c_0$$

Задача 51. Докажите, что функционал является линейным и непрерывным, найдите его норму.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x = (x_1, x_2, ...) \in c$$