Тогда пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называются квазиизометричными, а отображение f — квазиизометрией. В случае если $C_1 = C_2 = 1$ эти пространства называют также изометричными, а отображение, соответственно, изометрией.

Определение 1.9. Пусть $\mathcal{X}$ — метрическое пространство и $\mathcal{X}^*$ — полное метрическое пространство. Пространство $\mathcal{X}^*$ называется **пополнением** пространства $\mathcal{X}$, если $\mathcal{X}$ изометрично всюду плотному подмножеству $\mathcal{X}^*$.

Теорема 1.3. *Каждое метрическое пространство $\mathcal{X}$ имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из $\mathcal{X}$.*

Замечание 1. В ряде задач бывает полезен следующий *очевидный* принцип вложения. Если пространство (квази)изометрично подмножеству пространства полнота которого уже известна, то пополнение данного пространства будет (квази)изометрично замыканию найденного подмножества.

Упражнение 1.3. *Доказать принцип вложения.*

Пример 1.1. [6, С. 10—11] Пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \tag{4}$$

является полным.

Действительно, если последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики (4), то при любом фиксированном $x \in [a,b]$ числовая последовательность $f_n(x)$ является фундаментальной, и поэтому имеет предел (в силу полноты пространства $\mathbb{R}$). Обозначим этот предел $f(x)$. Покажем, что $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ в метрике (4). Действительно, имеем:

$$\forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon \quad \forall n,m \geq N_\varepsilon \text{ выполнено } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b].$$

Зафиксируем n и перейдем к пределу при $m \to \infty$. В пределе для любого $n \geq N_\varepsilon$ получим неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in [a,b].$$

Следовательно, последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$. В курсе математического анализа было доказано, что тогда функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a,b]$. Полнота пространства $C[a,b]$ доказана.

Пример 1.2. [6, С. 11] Пространство ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой (4) является полным.

Действительно, как и в примере 1.1, доказывается, что если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ фундаментальна относительно метрики (4), то она сходится к некоторой функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, в метрике (4). Тогда

$$\exists n_1 : \sup_{x\in[a,b]} |f_{n_1}(x) - f(x)| < 1,$$

и поэтому для любого $x \in [a,b]$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leq 1 + \sup_{x\in[a,b]} |f_{n_1}(x)|.$$

Следовательно, функция $f(x)$ ограничена, что и доказывает полноту рассматриваемого метрического пространства.

Аналогично доказывается, что множество m всех ограниченных числовых последовательностей с метрикой

$$\rho(\{\xi^k\},\{\eta^k\}) = \sup_k |\xi^k - \eta^k| \tag{5}$$

является полным метрическим пространством.

Замечание 2. В дальнейшем мы часто будем рассматривать метрические пространства элементами которых являются числовые последовательности. Эти пространства являются бесконечномерными аналогами пространства конечномерных пространств $\mathbb{R}^n$. Часто в этих случаях нами используются следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = \{\xi_k\},\ k = 1,2,\ldots$$

или с верхними индексами

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots) = \{\xi^k\},\ k = 1,2,\ldots$$

Пример 1.3. [6, С. 11] Множество всех сходящихся последовательностей действительных чисел с метрикой (5) является полным метрическим пространством.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов этого пространства фундаментальна относительно метрики (5). Тогда если $x_n = \{\xi_n^k\}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall n, m \geq N_\varepsilon \ \text{ вып. } |\xi_n^k - \xi_m^k| < \varepsilon \quad \forall k. \tag{6}$$

Отсюда следует, что при фиксированном k числовая последовательность $\{\xi_n^k\}$ сходится. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n^k = \xi^k.$$

Тогда, переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (6), получаем:

$$\forall n \geq N_\varepsilon \ \ |\xi_n^k - \xi^k| \leq \varepsilon \quad \forall k,$$

т.е. $\forall n \geq N_\varepsilon$

$$\sup_k |\xi_n^k - \xi^k| \leq \varepsilon,$$

а это означает, что $x_n \to x = \{\xi^k\}$ при $n \to \infty$. Осталось показать, что последовательность $x = \{\xi^k\}$ сходящаяся. Для любых k, p и n имеем:

$$\begin{gathered}|\xi^k - \xi^{k+p}| \leq |\xi^k - \xi_n^k| + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}| + \\ +|\xi_n^{k+p} - \xi^{k+p}| \leq 2\rho(x, x_n) + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}|.\end{gathered} \tag{7}$$

Из того, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$, следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \ \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{3},$$

а из сходимости последовательности $x_{n_\varepsilon} = \{\xi_{n_\varepsilon}^k\}$ следует, что

$$\exists K_\varepsilon : \ \forall k \geq K_\varepsilon, \ \forall p \ |\xi_{n_\varepsilon}^k - \xi_{n_\varepsilon}^{k+p}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и поэтому

$$\forall k \geq K_\varepsilon, \ \forall p \ \ |\xi^k - \xi^{k+p}| < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $x = \{\xi^k\}$ сходящаяся.

Приведем еще пример неполного метрического пространства.

Пример 1.4. [6, С. 12] В множестве функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, введем метрику по формуле

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \tag{8}$$

Покажем, что это метрическое пространство не является полным.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{если } x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ nx & \text{если } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 1 & \text{если } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, для любых n и p

$$\int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| dx \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - \operatorname{sgn} x| dx + \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn} x - f_n(x)| dx = \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n},$$

и поэтому последовательность непрерывных функций (9) фундаментальна относительно метрики (8). Легко видеть, что в этой метрике она сходится к разрывной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x, \ \ x \in [-1, 1]$. Покажем, что в множестве непрерывных функций предела нет.

Предположим противное: пусть последовательность (9) в метрике (8) сходится к непрерывной функции $g(x)$, $x \in [-1, 1]$. Тогда $\forall n \in \mathbf{N}$

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx \leq \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)| dx + \int_{-1}^{1} |f_n(x) - g(x)| dx.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание вышесказанное, получаем

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx = 0.$$

Функция $F(x) = f(x) - g(x)$ является непрерывной во всех точках отрезка $[-1, 1]$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, $g(x) = f(x)$ для любого $x \neq$

0 из отрезка $[-1,1]$, что противоречит предположению непрерывности $f(x)$ на $[-1,1]$. Последнее утверждение является следствием следующей простой леммы.

Лемма 1.1 ([6, С. 13]). *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема (по Риману!) на промежутке Δ и*

$$\int\limits_{\Delta} |f(x)|dx = 0,$$

то $f(x) = 0$ в любой точке $x \in \Delta$, в которой функция f непрерывна.

Действительно, если функция f непрерывна в точке $x_0 \in \Delta$ и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0, в которой $|f(x)| > 0$, и поэтому тогда

$$\int\limits_{\Delta} |f(x)|dx \geq \int\limits_{\Delta\cap O(x_0)} |f(x)|dx > 0.$$

Использованные литературные источники: [6, §1, пп 1.1, 1.2, С. 3–15], [7, Гл. 2, § 1–3, С. 57–87], [8, Гл. 2, §1,С. 189–197]

Задачи[1]

1. Является ли метрическим пространством множество точек окружности, если расстоянием между точками считать длину наименьшей дуги, соединяющей данные точки?

2. Является ли метрическим пространством семейство всех непустых подмножеств метрического пространства X, если "расстояние"между множествами $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset X$ определить равенством

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x\in E_1,\, y\in E_2} \rho(x, y)?$$

[1]Подобранные в этом пункте задачи взяты из [1, Гл. 1, § 6, С. 37–42], [3, Гл. IV, С. 16–35], [4, Гл. IV, § 18, С. 356–362]

3. Доказать, что для любых трех точек x, y, z метрического пространства X справедливо неравенство

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y).$$

4. Доказать, что для любых четырех точек x, y, u, v метрического пространства X справедливо неравенство

$$|\rho(x, u) - \rho(y, v)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, v).$$

5. Доказать, что в метрическом пространстве последовательность может иметь только один предел.

6. Доказать, что для любых двух различных точек метрического пространства существуют непересекающиеся шары с центрами в этих точках.

7. Может ли шар радиуса 4 быть собственным подмножеством шара радиуса 3?

8. Будет ли на множестве всех числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ $(x_n \in \mathbb{R}$ или $x_n \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots)$ метрикой функция

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),\ y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)?$$

9. Является ли метрическим пространством семейство всех непустых подмножеств метрического пространства X, если "расстояние" между множествами $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset X$ определить равенством

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x\in E_1,\, y\in E_2} \rho(x, y)?$$

10. Доказать, что если (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства соответственно с метриками ρ_X и ρ_Y, то функция

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \sqrt{[\rho_X(x_1, x_2)]^2 + [\rho_Y(y_1, y_2)]^2}$$

является метрикой в их произведении $X \times Y$, называемом в этом случае *декартовым произведением метрических пространств X и Y*.

11. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика на множестве X. Доказать, что функции

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},$$

$$\rho_2(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\}, \quad \rho_3(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$$

являются метриками на множестве X, эквивалентными метрике ρ.

12. Доказать, что следующие пространства неполны и построить их пополнение:

а) прямая $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

б) прямая $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y) = |e^x - e^y|$.

13. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$?

14. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы в метрике $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ вещественная прямая была полным метрическим пространством?

2. Линейные нормированные пространства

Определение 2.1. Линейным или векторным пространством над полем действительных (или комплексных) чисел называется множество L элементов $x, y, z, \ldots$ произвольной природы, для которых определены операции сложения двух элементов и умножения элементов на действительные (или комплексные) числа, при этом выполняются аксиомы:

1) каждой паре x, y элементов из L поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется суммой элементов x, y и обозначается $x+y$;

2) каждому элементу x из L и каждому действительному (комплексному) числу α поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется произведением элемента x на число α и обозначается αx.

При этом эти операции удовлетворяют следующим двум группам условий:

I. 1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);

3) существует элемент, называемый нулевым и обозначаемый 0, такой, что $x + 0 = x \ \forall x \in L$;

4) $\forall x \in L \ \exists y \in L : x + y = 0$;

II. 5) $1x = x \ \forall x \in L$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения);

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность относительно числового множителя);

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность относительно элементов пространства);

Для данного элемента $x \in L$ элемент $y \in L$, удовлетворяющий условию $x + y = 0$, называется противоположным элементу x и обозначается $-x$. Таким образом, по определению $x + (-x) = 0$. Элемент $x + (-y)$ называется разностью элементов x, y и обозначается $x - y$. Элементы линейного пространства обычно называют векторами, а операции сложения векторов и умножения вектора на число — линейными операциями.

Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется любой вектор вида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \tag{10}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числовые множители. Линейная комбинация (10) называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ отличен от нуля.

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация (10), равная нулю. Если же только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулю, то векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются линейно независимыми.

Определение 2.2. Произвольная система векторов линейного пространства называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 2.3. Линейное пространство называется n-мерным, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно